

## 第2章 大回転と有限変形を厳密に考慮した柔軟マルチボディシステムの定式化とそのロバスト制御系の構築

小林 信之

### 2. 1 序 論

柔軟ロボットアームや柔軟宇宙構造物など大回転運動と弾性振動が連成した柔軟構造物に対して、その動的挙動を厳密にシミュレーション可能な定式化手法を確立することは、柔軟体を含むマルチボディダイナミクスにおいて極めて重要な問題であり、今日に至るまで、さまざまな手法が提案されている<sup>(1)-(4)</sup>。主に用いられている手法は、従来の剛体のダイナミクスに局所座標系で表された弾性変形を加え、大回転に伴う非線形性を座標変換行列により考慮する定式化であり、弾性変形の近似法、局所座標系の定義の仕方、一般化座標の取り方などの違いにより、さまざまに分類される<sup>(5)</sup>。

マルチボディダイナミクスにおいては、柔軟体の大回転運動だけでなく、衝突や構造変化などの境界変化問題に対しても正確にシミュレーション可能な定式化が要求されることが多く、境界条件が固定したモード法では自由度の低減が容易にできないので、弾性変形の精度向上のために自由度の増大を招く。

一方、大規模有限要素解析において、Hurty は有限要素で表された全系モデルを部分構造(分系)に分割し、その各々の変形を剛体モード、静的モードおよび両端固定の動的モードの一次結合で表したマトリクス法に基づいた部分構造手法を提案した<sup>(6)</sup>。しかし、この手法において結合される各モードの精度は、各分系の有限要素モデルの精度に依存し、しかも、静的モードに対する慣性力は、静縮小したモード行列から導出されるため、動的な特性に対する精度が保証されず、精度向上のために多くの振動モードの採用が要求される。

それに対し、研究分担者は、梁の変形を剛体モードを含む梁の変位関数で表された静的モードと解析的に導出された両端固定振動モードの一次結合として表した柔軟梁の線形理論を提案しており、線形領域において低次元でかつ高精度な梁モデルの構築が可能であることが示している<sup>(7)</sup>。

本研究では、以下の項目を目標として実施した。

モード合成法<sup>(7)</sup>を大回転する柔軟梁(以下, CMS 梁要素と呼ぶ)に適用し, 大回転と有限変形により生じる非線形力を厳密に考慮した低次元かつ高精度な動力学定式化手法を開発する.

本手法の妥当性と有効性を検証するために, 動的なスティフニング効果が顕著となる大回転運動を行う柔軟梁の動的挙動について本定式化手法による数値計算を実施して検討を行う. 加えて, 剛体と柔軟梁により構成される2リンク柔軟ロボットアーム<sup>(2,9)</sup>に対して, マルチボディシステムとしてのモデル化および数値計算を行い, 本定式化手法を用いたモデルの有効性および妥当性の検証を実験結果との比較により行う.

最後に, 本定式化による2リンク柔軟ロボットアームモデルに対して, ロバスト安定な制振制御系を構築し, 実験結果と比較することにより, 本定式化手法が制御系設計にも有効であることを示す.

## 2. 2. 定式化

### 2. 2. 1 運動学

全体座標系  $0-XY$  に対して, 図1に示すように要素の2節点を結ぶ軸を  $x$  軸に持つボディ座標系  $0^i-x^i y^i$  を有する CMS 梁要素  $i$  を考える.  $0^i-x^i y^i$  で表される弾性変形は, ボディ座標系で表された節点座標  $\bar{\mathbf{u}}^i$  (以下, 局所節点座標と呼ぶ) に対して与えられる静的モードと梁のオイラー・ベルヌーイ理論より解析的に導出される両端固定の振動モードの一次結合として表す<sup>(7)</sup>. 系の一般化座標  $\bar{\mathbf{q}}^i$  を全体座標系で表された節点座標  $\mathbf{U}^i$  (以下, 絶対節点座標と呼ぶ) およびモード座標  $\xi^i$  に関して, 式(1)のように与える.

$$\bar{\mathbf{q}}^i = \{\mathbf{U}^i \quad \xi^i\}^T \quad (1)$$

ここで,

$$\mathbf{U}^i = \{U_1^i \quad U_2^i \quad U_3^i \quad U_4^i \quad U_5^i \quad U_6^i\}^T \quad (2)$$

$$\xi^i = \{\xi_{x1}^i \quad \dots \quad \xi_{xm}^i \quad \xi_{y1}^i \quad \dots \quad \xi_{ym}^i\}^T \quad (3)$$

であり,  $\xi_{xm}^i$  および  $\xi_{ym}^i$  は CMS 梁要素  $i$  の軸および曲げ振動に関する  $n$  次の両

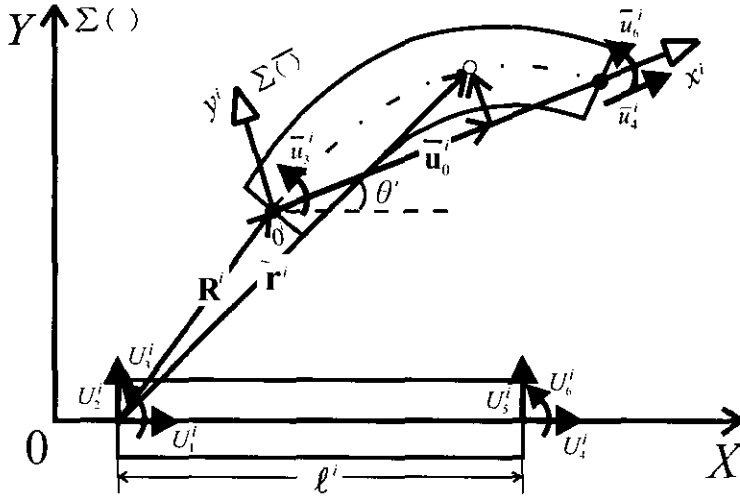


Fig.1 Flexible Beam with Large Rotation

端固定境界におけるモード座標である。

全体座標系から見た変形後の要素上の任意点  $\bar{\mathbf{r}}^i$  は、

$$\bar{\mathbf{r}}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i(\bar{\mathbf{u}}_0^i + \bar{\mathbf{N}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + \Phi^i \xi^i) \quad (4)$$

$\mathbf{A}^i$  は、ボディ座標系から全体座標系への座標変換行列である。

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta^i & -\sin \theta^i \\ \sin \theta^i & \cos \theta^i \end{bmatrix} \quad (5)$$

全体座標系表示のボディ座標系原点の位置  $\mathbf{R}^i$  は左節点の並進成分として、また、ボディ座標系内の変形前の任意点  $\bar{\mathbf{u}}_0^i$  は、それぞれ次のようになる。

$$\mathbf{R}^i = \{U_1^i \quad U_2^i\}^T \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_0^i = \{x^i \quad 0\}^T \quad (7)$$

両節点の剛体変位および左節点の軸方向変位が零になるので、局所節点座標  $\bar{\mathbf{u}}^i$  は式(8)のように与えられる。

$$\bar{\mathbf{u}}^i = \{\bar{u}_3^i \quad \bar{u}_4^i \quad \bar{u}_6^i\}^T \quad (8)$$

局所節点座標  $\bar{\mathbf{u}}^i$  は、幾何学的関係から絶対節点座標  $\mathbf{U}^i$  に関して、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_3^i &= U_3^i - \theta^i \\ \bar{u}_4^i &= \sqrt{(U_4^i - U_1^i + \ell^i)^2 + (U_5^i - U_2^i)^2} - \ell^i \\ \bar{u}_6^i &= U_6^i - \theta^i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

局所節点座標  $\bar{\mathbf{u}}^i$  に関する静的モード  $\bar{\mathbf{N}}^i$  は、軸変位と曲げ変位を考慮して

$$\bar{\mathbf{N}}^i = \begin{bmatrix} 0 & \eta^i & 0 \\ \ell^i(\eta^i - 2\eta^{i2} + \eta^{i3}) & 0 & \ell^i(-\eta^{i2} + \eta^{i3}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $\eta^i = x^i / \ell^i$  である。

モード座標  $\xi^i$  に関する動的モード  $\Phi^i$  は、軸振動モード  $\Phi_x^i$  および曲げ振動モード  $\Phi_y^i$  に分けて、式(11)のように与える。

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \Phi_x^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_y^i \end{bmatrix} \quad (11)$$

良く知られているように、一様梁の軸および曲げ振動に関する両端固定境界の  $n$  次モードは式(12)となる。

$$\Phi_{,yn}^i = C_n \sin \lambda_{,yn} \eta^i; \quad \lambda_{,yn} = n\pi \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{,yn}^i &= D_n \{(-\sin \lambda_{,yn} + \sinh \lambda_{,yn})(-\cos \lambda_{,yn} \eta^i + \cosh \lambda_{,yn} \eta^i) \\ &\quad - (-\cos \lambda_{,yn} + \cosh \lambda_{,yn})(-\sin \lambda_{,yn} \eta^i + \sinh \lambda_{,yn} \eta^i)\} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $C_n$ 、 $D_n$  は任意定数である。

変形後のボディ座標系の姿勢  $\theta^i$  は、絶対節点座標  $\mathbf{U}^i$  に関して

$$\tan \theta^i = (U_5^i - U_2^i) / (U_4^i - U_1^i + \ell^i) \quad (14)$$

式(4)で表された一般形  $\bar{\mathbf{r}}^i$  の変分  $\delta \bar{\mathbf{r}}^i$  を求めると、

$$\delta \bar{\mathbf{r}}^i = \delta \mathbf{R} + \mathbf{A}'_{,0} (\bar{\mathbf{u}}_0^i + \bar{\mathbf{N}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + \Phi^i \xi^i) \delta \theta^i + \mathbf{A}' \bar{\mathbf{N}}^i \delta \bar{\mathbf{u}}^i + \mathbf{A}' \Phi^i \delta \xi^i \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{A}'_{,0}$  は座標変換行列  $\mathbf{A}'$  の  $\theta^i$  に関する微分を表す。

$\bar{\mathbf{r}}^i$  の加速度  $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$  は、式(15)を参照にして、

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\mathbf{r}}}^i &= \ddot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{A}'_{,0} (\bar{\mathbf{u}}_0^i + \bar{\mathbf{N}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + \Phi^i \xi^i) \ddot{\theta}^i + \mathbf{A}' \bar{\mathbf{N}}^i \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^i + \mathbf{A}' \Phi^i \ddot{\xi}^i \\ &\quad - \mathbf{A}' (\bar{\mathbf{u}}_0^i + \bar{\mathbf{N}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + \Phi^i \xi^i) \dot{\theta}^{i2} + 2\mathbf{A}'_{,0} (\bar{\mathbf{N}}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i + \Phi^i \dot{\xi}^i) \dot{\theta}^i \end{aligned} \quad (16)$$

$\bar{\mathbf{u}}^i$  および  $\theta^i$  は式(9)および式(15)として与えられるので、その速度および加

速度は絶対節点座標  $U^i$  に関して、式(20)および式(21)として求まる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}^i &= \theta^i_{,v} \dot{U}^i \\ \ddot{\theta}^i &= \theta^i_{,v} \ddot{U}^i + \dot{\theta}^i_{,v} \dot{U}^i \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{u}}^i &= (\bar{u}^i_{,v} + \bar{u}^i_{,o} \theta^i_{,v}) \dot{U}^i \\ \ddot{\bar{u}}^i &= (\bar{u}^i_{,v} + \bar{u}^i_{,o} \theta^i_{,v}) \ddot{U}^i + (\dot{\bar{u}}^i_{,v} + \dot{\bar{u}}^i_{,o} \theta^i_{,v} + \bar{u}^i_{,o} \dot{\theta}^i_{,v}) \dot{U}^i \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^i_{,v} &= \partial \bar{u}^i / \partial U^i \\ \bar{u}^i_{,o} &= \partial \bar{u}^i / \partial \theta^i \\ \theta^i_{,v} &= \partial \theta^i / \partial U^i \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式(20)および式(21)なる関係を用いて、 $\delta \bar{r}^i$  は  $\delta U^i$  および  $\delta \xi^i$  に関して式(23)のように与えられる。

$$\delta \bar{r}^i = \tilde{\alpha}_1 \delta U^i + \tilde{\alpha}_2 \delta \xi^i \quad (23)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \{N + A^i_{,o} (\bar{u}_0^i + \bar{N}^i \bar{u}^i + \Phi^i \xi^i) \theta^i_{,v} + A^i \bar{N}^i (\bar{u}^i_{,v} + \bar{u}^i_{,o} \theta^i_{,v})\} \\ \tilde{\alpha}_2 &= A^i \Phi^i \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

となる。

同様に、 $\ddot{\bar{r}}^i$  は  $U^i$  および  $\xi^i$  の速度、加速度に関して式(26)で与えられる。

$$\ddot{\bar{r}}^i = \tilde{\alpha}_1 \ddot{U}^i + \tilde{\alpha}_2 \ddot{\xi}^i + \tilde{\alpha}_3 \dot{U}^i + \tilde{\alpha}_4 \dot{U}^i \theta^i_{,v} \dot{U}^i + \tilde{\alpha}_5 \dot{\xi}^i \theta^i_{,v} \dot{U}^i \quad (26)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_3 &= A^i_{,o} (\bar{u}_0^i + \bar{N}^i \bar{u}^i + \Phi^i \xi^i) \dot{\theta}^i_{,v} \\ &\quad + A^i \bar{N}^i (\dot{\bar{u}}^i_{,v} + \dot{\bar{u}}^i_{,o} \theta^i_{,v} + \bar{u}^i_{,o} \dot{\theta}^i_{,v}) \\ \tilde{\alpha}_4 &= -A^i (\bar{u}_0^i + \bar{N}^i \bar{u}^i + \Phi^i \xi^i) \theta^i_{,v} + 2A^i_{,o} \bar{N}^i (\bar{u}^i_{,v} + \bar{u}^i_{,o} \theta^i_{,v}) \\ \tilde{\alpha}_5 &= 2A^i_{,o} \Phi^i \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

## 2. 2. 2 運動方程式の導出

慣性力、弾性力および一般化力に関する仮想仕事を導出し、仮想仕事の

原理およびダランベールの原理を用いて運動方程式の導出を行う。

【慣性項】 慣性力による仮想仕事  $\delta\tilde{W}_{inertia}^i$  は式(28)で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta\tilde{W}_{inertia}^i &\equiv - \int_V \rho \delta\tilde{\mathbf{r}}^{i'T} \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}^i d\mathbf{v}^i \\ &= - \delta\tilde{\mathbf{q}}^{i'T} (\tilde{\mathbf{M}}^i \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^i + \tilde{\mathbf{Q}}_v^i)\end{aligned}\quad (28)$$

ここで、 $\rho$  は CMS 梁要素  $i$  の密度である。

式(28)に式(23)および式(26)を代入し、質量マトリクス  $\tilde{\mathbf{M}}^i$ 、遠心およびコリオリに関する慣性力成分  $\tilde{\mathbf{Q}}_v^i$  はそれぞれ式(29)および(30)となる。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}^i &= \rho \int_V \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1^{i'T} \tilde{\alpha}_1^i & \tilde{\alpha}_1^{i'T} \tilde{\alpha}_2^i \\ sym. & \tilde{\alpha}_2^{i'T} \tilde{\alpha}_2^i \end{bmatrix} d\mathbf{v}^i \\ &\equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uv}^i & \mathbf{M}_{u\xi}^i \\ sym. & \mathbf{M}_{\xi\xi}^i \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_v^i = \rho \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1^{i'T} \tilde{\alpha}_3^i \dot{\mathbf{U}}^i + \tilde{\alpha}_1^{i'T} \tilde{\alpha}_4^i \dot{\mathbf{U}}^i{}_{,v} \dot{\mathbf{U}}^i + \tilde{\alpha}_1^{i'T} \tilde{\alpha}_3^i \dot{\xi}^i \theta^i{}_{,v} \dot{\mathbf{U}}^i \\ \tilde{\alpha}_2^{i'T} \tilde{\alpha}_3^i \dot{\mathbf{U}}^i + \tilde{\alpha}_2^{i'T} \tilde{\alpha}_4^i \dot{\mathbf{U}}^i{}_{,v} \dot{\mathbf{U}}^i + \tilde{\alpha}_2^{i'T} \tilde{\alpha}_3^i \dot{\xi}^i \theta^i{}_{,v} \dot{\mathbf{U}}^i \end{Bmatrix} d\mathbf{v}^i = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{v-u}^i \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{v-\xi}^i \end{Bmatrix}\quad (30)$$

【剛性項】 ボディ座標系表示の梁の軸変形に伴う要素  $i$  の軸ひずみ  $\tilde{\varepsilon}^i$  およびそれに伴う軸弾性力  $\tilde{\sigma}^i$  は、式(31)、(32)で与えられる。

$$\tilde{\varepsilon}^i = (\partial\bar{\mathbf{N}}_x^i / \partial x^i) \bar{\mathbf{u}}_4^i + \{\partial\Phi_x^i / \partial x^i\} \xi_x^i\quad (31)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^i &= EA \tilde{\varepsilon}^i \\ &= EA \left\{ \partial\bar{\mathbf{N}}_x^i / \partial x^i \quad \partial\Phi_x^i / \partial x^i \right\} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_4^i \\ \xi_x^i \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (32)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{N}}_x^i = \eta^i\quad (33)$$

式(31)で与えられる軸ひずみの変分  $\delta\tilde{\varepsilon}^i$  は式(34)として与えられる。

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\varepsilon}^i &= (\partial\bar{\mathbf{N}}_x^i / \partial x^i) \delta\mathbf{u}_4^i + \{\partial\Phi_x^i / \partial x^i\} \delta\xi_x^i \\ &= \{(\partial\bar{\mathbf{N}}_x^i / \partial x^i) \{\bar{\mathbf{u}}_{4,v}^i + \bar{\mathbf{u}}_{4,\theta}^i \theta^i{}_{,v}\} \quad \partial\Phi_x^i / \partial x^i\} \delta\tilde{\mathbf{q}}^i\end{aligned}\quad (34)$$

軸弾性力  $\tilde{\sigma}^i$  のなす仮想仕事  $\delta\tilde{W}_{axial}^i$  は、式(35)として与えられる。

$$\delta \tilde{W}_{axial}^i \equiv \int_V \delta \tilde{\varepsilon}^{i^T} \tilde{\sigma}^i dx^i \quad (35)$$

式(35)に式(33)および式(34)を代入し、式(36)を得る。

$$\begin{aligned} \delta W_{axial}^i &= \delta \tilde{\mathbf{q}}^{i^T} \begin{bmatrix} (\bar{u}_{4,u}^i + \bar{u}_{4,\theta}^i \theta^i_{,u})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x_{-}\bar{u}\bar{u}} & \mathbf{K}_{x_{-}\bar{u}\xi} \\ sym. & \mathbf{K}_{x_{-}\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_4^i \\ \xi_x^i \end{Bmatrix} \\ &= \delta \tilde{\mathbf{q}}^{i^T} \mathbf{Q}_{k_{-}axial}^i \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{x_{-}\bar{u}\bar{u}} &= EA \int_x (\partial \bar{\mathbf{N}}_x^i / \partial x^i)^2 dx^i \\ \mathbf{K}_{x_{-}\xi\xi} &= EA \int_x \{ \partial \Phi_x^i / \partial x^i \}^T \{ \partial \Phi_x^i / \partial x^i \} dx^i \\ \mathbf{K}_{x_{-}\bar{u}\xi} &= EA \int_x (\partial \bar{\mathbf{N}}_x^i / \partial x^i) \{ \partial \Phi_x^i / \partial x^i \} dx^i = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式(37)において、変位関数と両端固定モード関数の内積で表される積分値  $\mathbf{K}_{x_{-}\bar{u}\xi}$  は 0 となり、これは各モード間の変位、ひずみ領域における干渉がないことを意味し、剛性項は  $\bar{u}_4^i$  と  $\xi_x^i$  に関して非連成となる。

以上より、軸弾性力に関する一般化力は式(38)として与えられる。

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{k_{-}axial}^i = \begin{bmatrix} (\bar{u}_{4,u}^i + \bar{u}_{4,\theta}^i \theta^i_{,u})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x_{-}\bar{u}\bar{u}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{x_{-}\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_4^i \\ \xi_x^i \end{Bmatrix} \quad (38)$$

ボディ座標系内で表される梁の曲げ変形に伴う曲率  $\tilde{\kappa}^i$  は式(39)として与えられる。

$$\delta \tilde{\kappa}^i = \{ \partial^2 \bar{\mathbf{N}}_y^i / \partial x^{i^2} \} \delta \bar{\mathbf{u}}_y^i + \{ \partial^2 \Phi_y^i / \partial x^{i^2} \} \xi_x^i \quad (39)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{u}}_y^i = \{ \bar{u}_3 \quad \bar{u}_6 \}^T \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_y^i = \{ \ell^i (\eta^i - 2\eta^{i^2} + \eta^{i^3}) \quad \ell^i (-\eta^{i^2} + \eta^{i^3}) \} \quad (41)$$

曲率  $\tilde{\kappa}^i$  に伴う曲げモーメント  $\tilde{\mu}^i$  は式(42)として与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^i &= EI \tilde{\kappa}^i \\ &= EI \{ \partial^2 \bar{\mathbf{N}}_y^i / \partial x^{i^2} \quad \partial^2 \Phi_y^i / \partial x^{i^2} \} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_y^i \\ \xi_x^i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

$\bar{\kappa}'$  の変分  $\delta\bar{\kappa}'$  は式 (43) として与えられる.

$$\begin{aligned}\delta\kappa' &= \{\partial^2\bar{\mathbf{N}}_y' / \partial x'^2\} \delta\bar{\mathbf{u}}_y' + \{\partial^2\Phi_y' / \partial x'^2\} \delta\xi_y' \\ &= \{\{\partial^2\bar{\mathbf{N}}_y' / \partial x'^2\}(\bar{\mathbf{u}}_{y,\mathbf{U}}' + \bar{\mathbf{u}}_{y,\theta}' \theta'_{,\mathbf{U}})\} \partial^2\Phi_y' / \partial x'^2\} \delta\bar{\mathbf{q}}'\end{aligned}\quad (43)$$

曲げモーメント  $\tilde{\mu}'$  のなす仮想仕事  $\delta\tilde{W}'_{bending}$  は式 (44) として与えられる.

$$\delta\tilde{W}'_{bending} \equiv \int_x \delta\bar{\kappa}'^T \tilde{\mu}' dx' \quad (44)$$

式 (44) に式 (42) および式 (43) を代入し式 (45) を得る.

$$\begin{aligned}\delta W'_{bending} &= \delta\bar{\mathbf{q}}'^T \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{u}}_{y,\mathbf{U}}' + \bar{\mathbf{u}}_{y,\theta}' \theta'_{,\mathbf{U}})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{y,\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} & \mathbf{K}_{y,\bar{\mathbf{u}}\xi} \\ sym. & \mathbf{K}_{y,\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_y' \\ \xi_y' \end{Bmatrix} \\ &= \delta\bar{\mathbf{q}}'^T \tilde{\mathbf{Q}}'_{k\_bending}\end{aligned}\quad (45)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{K}_{y,\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} &= EI \int_x \{\partial^2\bar{\mathbf{N}}_y' / \partial x'^2\}^T \{\partial^2\bar{\mathbf{N}}_y' / \partial x'^2\} dx' \\ \mathbf{K}_{y,\bar{\mathbf{u}}\xi} &= EI \int_x \{\partial^2\Phi_y' / \partial x'^2\}^T \{\partial^2\Phi_y' / \partial x'^2\} dx' \\ \mathbf{K}_{y,\xi\xi} &= EI \int_x \{\partial^2\bar{\mathbf{N}}_y' / \partial x'^2\}^T \{\partial^2\Phi_y' / \partial x'^2\} dx' = \mathbf{0}\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

式 (46) において, 軸変形の場合と同様に, 変位関数と両端固定モード関数の内積で表される積分値  $\mathbf{K}_{y,\bar{\mathbf{u}}\xi}$  は 0 となり, 剛性項は  $\bar{\mathbf{u}}_y'$  と  $\xi_y'$  に関して非連続となる.

以上より, 曲げ変形に関する一般化力は式 (47) として与えられる.

$$\tilde{\mathbf{Q}}'_{k\_bending} = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{u}}_{y,\mathbf{U}}' + \bar{\mathbf{u}}_{y,\theta}' \theta'_{,\mathbf{U}})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{y,\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{y,\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_y' \\ \xi_y' \end{Bmatrix} \quad (47)$$

式 (38) および式 (47) から一般化弾性力項  $\tilde{\mathbf{Q}}'_k$  が式 (48) のように与えられる.

$$\tilde{\mathbf{Q}}'_k = \tilde{\mathbf{Q}}'_{k\_axial} + \tilde{\mathbf{Q}}'_{k\_bending} \quad (48)$$

$\tilde{\mathbf{Q}}'_k$  は  $\bar{\mathbf{u}}'$  および  $\xi'$  に関して式 (49) のように与えられる.



$$\tilde{\mathbf{Q}}_k^i = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{Q}}_{k-u}^i \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{k-\xi}^i \end{array} \right\} \quad (49)$$

【一般化力項】 全体座標系で表された任意外力  $\mathbf{F}^i$  が作用した場合の一般化力の導出を試みる. 任意外力  $\mathbf{F}^i$  のなす仮想仕事は式(50)として与えられる.

$$\delta \tilde{W}_a^i \equiv \delta \tilde{\mathbf{r}}^{i T} \mathbf{F}^i \quad (50)$$

外力の作用する要素  $i$  の任意点  $\tilde{\mathbf{r}}^i$  の変分  $\delta \tilde{\mathbf{r}}^i$  は式(23)として与えられており, 式(50)へ代入することにより式(51)を得る.

$$\begin{aligned} \delta \tilde{W}_a^i &= \{ \delta \mathbf{U}^{i T} \tilde{\alpha}_1^T + \delta \xi^{i T} \tilde{\alpha}_2^T \} \mathbf{F}^i \\ &= \delta \tilde{\mathbf{q}}^{i T} \tilde{\mathbf{Q}}_a^i \end{aligned} \quad (51)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_a^i &= \{ \tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}_2 \}^T \mathbf{F}^i \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{Q}}_{a-u}^i \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{a-\xi}^i \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

### 2・2・3 運動方程式

式(29), 式(30), 式(49)および式(52)として与えられた慣性項, 剛性項および一般化力項に関する仮想仕事から, 仮想仕事の原理およびダランベールの原理を用いれば CMS 梁要素  $i$  に関して式(53)なる関係が成立する.

$$-\int_V \rho \delta \tilde{\mathbf{r}}^{i T} \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}^i d\mathbf{v}^i - \int_V \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i T} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^i dx^i - \int_V \delta \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{i T} \tilde{\boldsymbol{\mu}}^i dx^i + \delta \tilde{\mathbf{r}}^{i T} \mathbf{F}^i = \mathbf{0} \quad (53)$$

式(53)を  $\delta \tilde{\mathbf{q}}^i$  に関してまとめることにより式(54)を得る.

$$-\delta \tilde{\mathbf{q}}^{i T} (\tilde{\mathbf{M}}^i \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^i + \tilde{\mathbf{Q}}_v^i + \tilde{\mathbf{Q}}_k^i - \tilde{\mathbf{Q}}_a^i) = \mathbf{0} \quad (54)$$

式(54)から要素  $i$  の運動方程式が一般化座標  $\tilde{\mathbf{q}}^i$  に関して式(55)のように与えられる.

$$\tilde{\mathbf{M}}^i \ddot{\mathbf{q}}^i = -\tilde{\mathbf{Q}}_v^i - \tilde{\mathbf{Q}}_k^i + \tilde{\mathbf{Q}}_a^i \quad (55)$$

一般化座標  $\tilde{\mathbf{q}}^i$  に関する運動方程式を絶対節点変位  $\mathbf{U}^i$  およびモード座標  $\xi^i$  に関して書き改めることにより、CMS 梁要素の運動方程式 (56) を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{UU}^i & \mathbf{M}_{U\xi}^i \\ \text{sym.} & \mathbf{M}_{\xi\xi}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}^i \\ \ddot{\xi}^i \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{v-U}^i \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{v-\xi}^i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{k-U}^i \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{k-\xi}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{a-U}^i \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{a-\xi}^i \end{Bmatrix} \quad (56)$$

## 2. 3 数値計算および考察

### 2. 3. 1 動的スティフニング効果

図2に示すような柔軟梁がその旋回方向に回転駆動  $\dot{\theta}_d$  を受けて Overall 運動を行った場合、この回転駆動に伴って生じる遠心力を微小変形を仮定した局所座標系内で評価すれば、梁の曲げ基本固有角振動数以上の回転速度に対して数値的発散が起きることが知られている<sup>(1)-(2)</sup>。これは、局所座標系内で評価される遠心力の曲げ方向成分が線形近似されることによって、それが剛性項における梁の曲げ復元力と相殺され、基本固有角振動数より大きな回転速度に対して見かけ上の負剛性を引き起こすことに起因した現象である。

本現象は、有限ひずみを伴う大変形を起こさない場合であっても、梁の弾性変形を評価する局所座標系内における弾性力の線形化に起因して不具合が生じてしまう問題であり、言い換えれば、梁の剛体回転運動に伴って生じる慣性力のなす動的効果が引き起こす数値的不安定問題である。

長さ  $L=8.0$  m, 密度  $\rho=2.767 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 曲げ剛性  $EI=5.666 \times 10^3$  Nm<sup>2</sup> なる柔軟梁を例にとり、一端をクランプした状態で式 (57) なる回転駆動を与えた時の検討を行う。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_d &= \left( \frac{\omega_s}{T_s} \right) \left\{ t - \left( \frac{T_s}{2\pi} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{T_s} t \right) \right\} & (0 \leq t \leq T_s) \\ \dot{\theta}_d &= \omega_s & (t \geq T_s) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

梁の曲げの基本角振動数は 2.91 rad/s であり、 $\dot{\theta}_d$  が 2.91 rad/s を超える領域で検討を行うため、式 (56) で定式化された 1 要素の 2 モード CMS 梁要素

を用いて,  $\omega_s = 4.0 \text{ rad/s}$ ,  $T_s = 15 \text{ s}$  とした時の梁先端弾性変形の時間変化を図3に示す. 同図中に, 弾性変形を局所座標系内で線形で取り扱った定式化<sup>(4)</sup>を用いた計算結果を鎖線で示す.

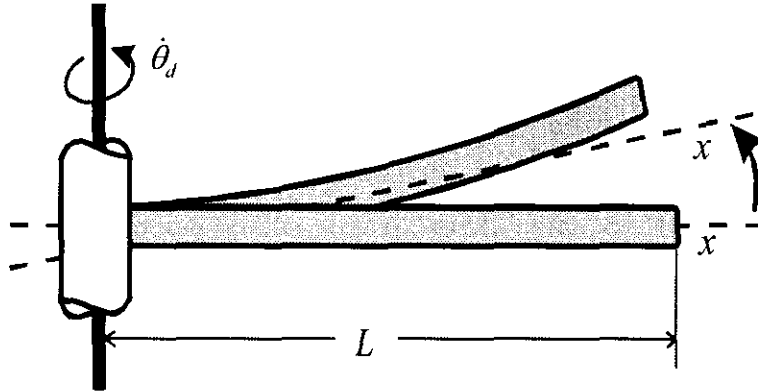


Fig.2 Flexible Beam Undergoing Overall Motion

図3より, 本定式化では数値的な発散が生じることなく, その曲げ復元力を正しく数値計算できており, 角速度  $\dot{\theta}_d$  が一定となる15秒以降弾性変形が0に近づいていることが分かる. 一方, 線形変形を取り扱った定式化においては, 4秒付近から本定式との差異が生じはじめ, 最終的に発散が生じており, 妥当な解を得ていないことが分かる.

本定式化においては, ボディ座標系を梁の2節点を結ぶ軸を  $x$  軸に持つように定義しているため, 軸変形に関する局所節点座標  $\bar{x}_i$  は式(9)のように与えられることにより, その軸ひずみは絶対節点座標に関して2次の非線形ひずみがモデル化されることとなる<sup>(10)</sup>. つまり, 本定式化では, この効果が厳密に取り扱われて運動方程式が導出されていることにより, 数値的発散を引き起こすことなく, 駆動遠心力が見かけ上の弾性復元力として働く動的スティフニング効果が数値計算可能となっている. さらに, この数値計算結果から, 本計算例のような大回転運動を伴った際の弾性変形に関する慣性力の方向および大きさが極めて重要となる問題に対して, 本 CMS 梁要素が1要素であっても精度の良い定式化がなされていることが示された.

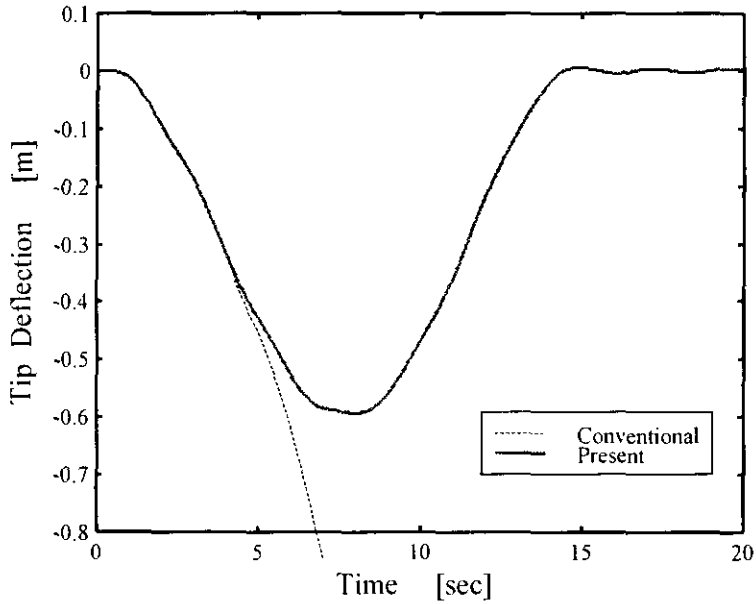


Fig.3 Tip Deflection ( Overall Motion )

### 2. 3. 2 マルチボディシステムへの適用

本論文で構築した定式化を柔軟体を含むマルチボディシステムへ適用し、実験結果との比較を行うことにより、本定式化の妥当性および有効性について検討を行う。

【2リンク柔軟ロボットアームのモデリング】 図4に2リンク柔軟ロボットアームの解析モデルを示す。全体座標系 0-XY の原点に肩モータが位置し、弾性リンク1と剛結された剛体1に結合されている。肘部で弾性リンク1と剛結された剛体2は、リンク2に剛結された剛体3と肘モータを介してヒンジ結合されている。さらに、弾性リンク2の先端に剛体4なる集中質量が剛結されている。

図4に示される剛体  $i$  の一般化座標  $\mathbf{q}_i^r$  は式 (58) のように与えられる。

$$\mathbf{q}_i^r = \{x, y, \phi\}^T \quad (58)$$

$n$  要素に分割した弾性リンク  $i$  の節点座標  $\mathbf{U}_i^r$  および両端固定境界のモード

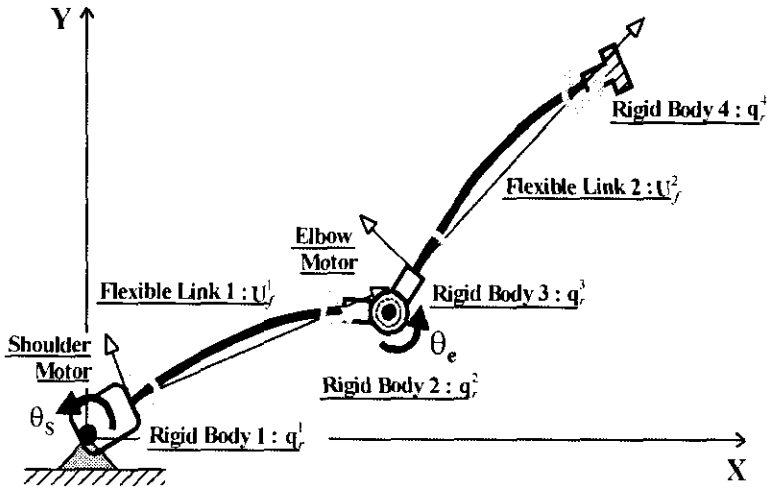


Fig.4 2-Link Flexible Robot Arm

座標  $\xi^i$  をそれぞれ式 (59) および式 (60) のように定める.

$$U_j^i = \{U_1^i \ U_2^i \ \dots \ U_{3m+2}^i \ U_{3m+3}^i\}^T \quad (59)$$

$$\xi^i = \{\xi_{x,1}^i \ \xi_{x,2}^i \ \dots \ \xi_{y,1}^i \ \xi_{y,2}^i \ \dots\}^T \quad (60)$$

システム全体に対する一般化座標  $q$  が, 式 (61) のように与えられる.

$$q = \{\theta, q_r^1, U_j^1, \xi^1, q_r^2, \theta_e, q_r^3, U_j^2, \xi^2, q_r^4\}^T \quad (61)$$

ここで,  $\theta$ , および  $\theta_e$  はそれぞれ, 全体座標で表された肩モータの角度および肘モータの角度である. 剛体  $i$  と弾性リンク  $j$  を結ぶ剛結点  $k$  の, 全体座標系から見た剛体  $i$  と弾性リンク  $j$  の位置ベクトルをそれぞれ,  ${}^k r_r^i$ ,  ${}^k r_r^j$  とすれば, 拘束条件  ${}^k C_{rc}^{ij}$  は式 (62) として与えられる.

$${}^k C_{rc}^{ij} = \begin{Bmatrix} {}^k r_r^i - {}^k r_r^j \\ \phi_i - U_{3i,0}^i \end{Bmatrix} = 0 \quad (62)$$

ここで, 剛体1と弾性リンク1の結合点を  $k=1$ , 剛体2と弾性リンク1の結合点を  $k=2$ , 剛体3と弾性リンク2の結合点を  $k=3$ , 剛体4と弾性リンク1の結合点を  $k=4$  とする.

剛体2と剛体3を結ぶヒンジの拘束条件  ${}^k C_{hj}$  が式 (63) として与えられる.

$${}^k C_{hj}^{23} = {}^k r_r^2 - {}^k r_r^3 = 0 \quad (63)$$

ここで、剛体2と剛体3を結ぶヒンジの拘束点を  $k=5$  とする。

システムの拘束方程式が式(64)として与えられる。

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_{rc}^T \quad \mathbf{C}_{kj}^T\}^T = \mathbf{0} \quad (64)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_{rc} &= \{ {}^1\mathbf{C}_{rc}^{11T} \quad {}^2\mathbf{C}_{rc}^{21T} \quad {}^3\mathbf{C}_{rc}^{32T} \quad {}^4\mathbf{C}_{rc}^{42T} \}^T \\ \mathbf{C}_{kj} &= {}^5\mathbf{C}_{hj}^{23} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

各剛体の局所座標系を、剛体1に関しては左端部、その他の剛体に関しては、重心位置に設定した場合、剛体1に関しては回転のみ、残りの剛体に関しては並進座標と回転座標間の連成のない非連成の質量マトリクスが得られる。

柔軟アームはモータにより減速機を介して駆動されており、減速機の柔軟性およびモータの慣性モーメントを考慮したダイナミクスを考えると、非拘束状態におけるシステムの質量マトリクス  $\mathbf{M}$  は式(66)のように与えられる。

$$\mathbf{M} = \text{diag}[J, \mathbf{M}_r^1, \mathbf{M}_j^1, \mathbf{M}_r^2, J_c, \mathbf{M}_r^3, \mathbf{M}_j^2, \mathbf{M}_r^4] \quad (66)$$

ここで、 $\mathbf{M}_i^j$  および  $\mathbf{M}_j^i$  は剛体  $i$  および弾性リンク  $j$  の質量マトリクスであり、 $J$ 、および  $J_c$  は肩および肘モータの慣性モーメントである。

剛性項、外力項および遠心力およびコリオリ力に関する慣性力成分を含むシステムの一般化力項  $\mathbf{Q}$  は、式(67)のように与えられる。

$$\mathbf{Q} = \{Q, Q_r^1, \mathbf{Q}_j^{1T}, \mathbf{Q}_r^{2T}, Q_c, \mathbf{Q}_r^{3T}, \mathbf{Q}_j^{2T}, \mathbf{Q}_r^{4T}\}^T \quad (67)$$

式(64)の2階の時間微分から加速度方程式が式(68)のように与えられる。

$$\mathbf{C}_{,q} \ddot{\mathbf{q}} = -(\mathbf{C}_{,q} \dot{\mathbf{q}})_{,q} \dot{\mathbf{q}} - 2\mathbf{C}_{,q} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_{,m} \equiv \boldsymbol{\gamma} \quad (68)$$

式(66)、式(67)および式(68)を用いて、2リンク柔軟ロボットアームの運動方程式が一般化座標  $\mathbf{q}$  に関して式(69)のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_{,q}^T \\ \mathbf{C}_{,q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

ここで、 $\boldsymbol{\lambda}$  はラグランジェ乗数である、

式(69)で与えられた拘束条件付きの運動方程式は、微分代数方程式の形

式になるため、従属変数  $q_b$  およびラグランジェ乗数  $\lambda$  を陽に含む。従って、そのまま数値解を得ることは難しい。ここでは、微分代数運動方程式の解法として、式(69)を独立変数  $q_f$  に関して縮約を行うことにより、 $q_f$  に関する運動方程式を直接数値積分することにより数値解を得る方法を用いる。

式(69)を独立変数  $q_f$  および従属変数  $q_b$  に分離することにより、式(70)のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{q_f q_f} & \mathbf{M}^{q_f q_b} & \mathbf{C}_{,q_f}^T \\ \mathbf{M}^{q_b q_f} & \mathbf{M}^{q_b q_b} & \mathbf{C}_{,q_b}^T \\ \mathbf{C}_{,q_f} & \mathbf{C}_{,q_b} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^{q_f} \\ \mathbf{Q}^{q_b} \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (70)$$

式(70)を独立変数  $q_f$  に関して縮約することにより、式(71)を得る。

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_f = \hat{\mathbf{Q}} \quad (71)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}^{q_f q_f} - \mathbf{M}^{q_f q_b} \mathbf{C}_{,q_b}^{-1} \mathbf{C}_{,q_f} \\ &\quad - \mathbf{C}_{,q_f}^T (\mathbf{C}_{,q_b}^{-1})^T [\mathbf{M}^{q_b q_f} - \mathbf{M}^{q_b q_b} \mathbf{C}_{,q_b}^{-1} \mathbf{C}_{,q_f}] \\ \hat{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}^{q_f} - \mathbf{M}^{q_f q_b} \mathbf{C}_{,q_b}^{-1} \gamma \\ &\quad - \mathbf{C}_{,q_f}^T (\mathbf{C}_{,q_b}^{-1})^T [(\mathbf{Q}^{q_b} - \mathbf{M}^{q_b q_b} \mathbf{C}_{,q_b}^{-1} \gamma)] \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

式(71)は、微分方程式に変換されているため、通常微分方程式の解法で、解を得ることができる。ただし、拘束式が、しばしば、stiff な系にするため、十分な注意が必要である。

**【数値計算および実験結果との比較】** 図5に示す2リンク柔軟ロボットアームの実験機<sup>(9)</sup>を対象に数値計算を行い、実験結果との比較を行うことにより本定式化およびモデル化の妥当性および有効性の検証を行う。弾性リンクに関する仕様を表1に示す。

ここでは、2つの弾性リンクをそれぞれ1要素2モードの CMS 要素を用いてモデル化し、可変時間刻みの Gear 法を用いて積分した。

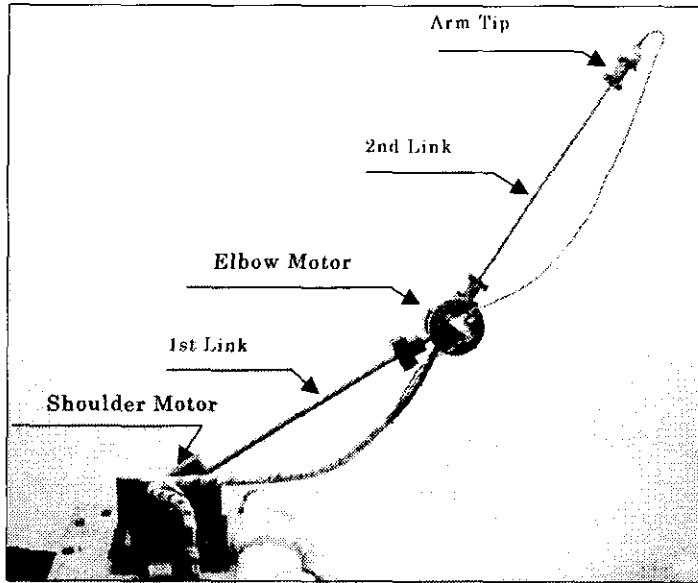


Fig.5 2 Link Flexible Arm

Table 1 Flexible Link Parameters

	1st Link	2nd Link
Material	SW	SW
Length [m]	$4.15 \times 10^{-1}$	$4.50 \times 10^{-1}$
Diameter [m]	$1.00 \times 10^{-2}$	$6.00 \times 10^{-3}$
Density [ $\text{kg/m}^3$ ]	$7.85 \times 10^3$	$7.85 \times 10^3$
Young's Modulus [ $\text{N/m}^2$ ]	$205 \times 10^9$	$205 \times 10^9$
Bending Rigidity [ $\text{Nm}^2$ ]	101	13.0



肩および肘モータの角度が共に $0^{\circ}$ である水平片持ち支持状態における自由振動波形から求まる固有振動数は、1次で2.32Hz、2次で6.04Hzであり、実験結果<sup>(19)</sup>とそれぞれ1.32%および2.53%の誤差となる。すなわち、弾性変形に関する線形領域の動特性は非常に良く一致している。

次に、モデルの妥当性および有効性の検証を行うために、動作目標として、モータの速度パターンを0.5秒間隔で台形的に加速、等速、減速を行うようにモータの回転角および回転速度について、コロケートなローカルフィードバックを与える。それにより、アームを目標姿勢まで大きく回転運動させ、アーム先端に取り付けた加速度計から得られる時刻歴波形と数値計算結果との比較を行う。

まずケース1として、肩モータのみを1.5秒間に $+45^{\circ}$ 動作させた場合について検討を行う。図6(a)に数値計算により得られた柔軟アームの運動の様子を示す。図の一本一本が任意時刻ごとの位置を表している。肩モータが $45^{\circ}$ 動いた後、その点まわりで自由振動している様子が分かる。図6(b)にアーム先端のY方向加速度の時間変化を示す。ここで、数値計算結果を実線で、実験結果を同図中破線で示している。

図6(b)において、全体として波形が非常に良く一致していることがわかる。変位領域でなく、加速度領域でこれだけの一致が見られる結果が得られたことから、本モデル化手法により、2リンク弾性ロボットアームのような大回転を伴う非線形システムに対して共振振動数のみならず振幅についても、十分な精度が得られていると言える。

なお、実験結果では高次の振動波形が見られるが、これは数値計算では考慮していない関節部の摩擦の影響と考えられる。

次にケース2として、1.5秒間に肩モータを $+30^{\circ}$ 、肘モータを $-60^{\circ}$ 動作させた場合について検討を行う。図7(a)に数値計算により得られた柔軟アームの運動の様子を示し、図7(b)にアーム先端のY方向加速度の時刻歴波形を示す。ここで、数値計算結果を実線で、実験結果を同図中破線で示している。

図7(b)において、0秒から1.5秒の間のモータが駆動されている時刻においては振幅の大きさに若干の違いが生じているが、その振動成分に関しては1.5秒以降の自由振動状態においても非常に良く一致していることが分かる。

モータが駆動されている時刻においては、図6(b)の場合と同様に実験結果では関節部の摩擦の影響を受けているため、振幅の差異が生じたものと考えられる。

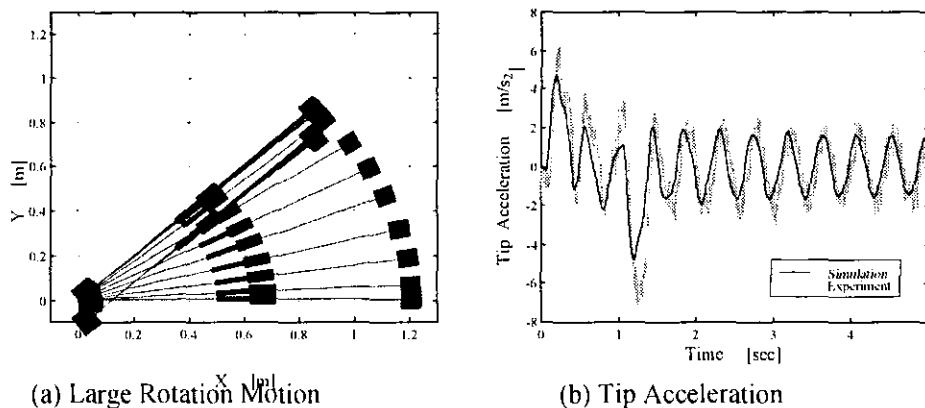


Fig.6 Time Historical Response for Case 1  
(Shoulder Motor  $+45^\circ$  , Elbow Motor  $0^\circ$  )

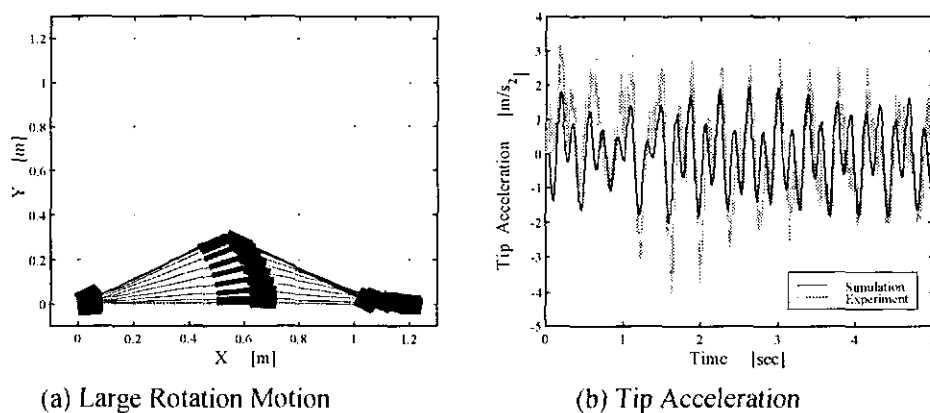


Fig.7 Time Historical Response for Case 2  
(Shoulder Motor  $+30^\circ$  , Elbow Motor  $-60^\circ$  )

以上から、全体としてその振動成分が加速度領域において、これだけ良く一致しているため、肘モーター可動の場合に対しても、本モデル化手法は、2リンク柔軟ロボットアームのような大回転を伴う非線形システムに対して十分な精度が確保されていると言える。

## 2. 4 2リンク柔軟ロボットアームの制振制御系設計

### 2. 4. 1 出力FBスライディングモード制御による制御系の設計

【アームの線形モデル】 式(70)を線形化すれば、式(73)を得る。

$$[M]\{\ddot{W}\} + [C_d]\{\dot{W}\} + [K]\{W\} = [B_s]\{U\} + \{G_0\} \quad (73)$$

ただし、 $\{U\} = \{u_1, u_2\}^T$  は肩および肘の制御力である。

制御帯域を考えて、各リンクで考慮する両端固定の振動モードを、それぞれ2次までとれば

$$\begin{aligned} \{W\} &= \{\theta_1, \beta_1, U_2, W_3, \beta_2, \theta_2, \beta, U_3, W_4, \beta_4, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}\}^T \\ [B_s] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

となる。これを、状態方程式に書き換えれば、式(74)となる。また、各関節モータ出力軸の角度、角速度および各リンク先端の速度を観測量にとれば、出力方程式は、式(75)で与えられる。

$$\dot{X} = AX + BU \quad (74)$$

$$Y = CX \quad (75)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -M^{-1}C_d & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -M^{-1}B_s \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X &= \{\dot{W}, W\}^T, & Y &= \{\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2 - \beta_2, \dot{\theta}_2 - \dot{\beta}_2, \dot{w}_2, \dot{w}_4\}^T \end{aligned}$$

各リンク先端に加速度計を取付け、加速度 $\dot{w}_2, \dot{w}_4$ を観測することを考えれば、部材座標系からみた出力の各リンク先端速度を微分する必要がある。ノイズ除去のためのローパスフィルターを兼ねた微分器を式(76)のように

設定し，出力  $\dot{w}_3, \dot{w}_4$  に作用させる．

$$Tr = \frac{s}{1+T_1s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (76)$$

フィルターを含む拡大系の状態変数は 34 になる．この系は，明らかに non-collocated system であるが，可制御，可観測である．この拡大系の状態方程式および出力方程式を改めて式(77)および式(78)のようにおく．

$$\dot{X} = AX + BU \quad (77)$$

$$Y = CX \quad (78)$$

以上により，モード合成法に基づく低次元モデルが導かれた．

**【出力 F. B. スライディングモード制御】** スライディングモード制御とは，システムをすべり状態超平面に導き，制御入力を高速で切換えながら平衡点へ滑らせる非線形適応制御の一つの手法である<sup>(11)</sup>．

分布定数系である柔軟ロボットアームでは，全ての状態変数が観測できるわけではなく，かつ，制御変数の数が多くなれば制御入力の計算量が多くなり，実時間制御も大変になってくる．このようなことを考慮して，ここでは，オブザーバを使わないで制御入力をつくることのできるように，最小誤差励振法を用いた準最適出力 F. B. スライディングモード制御 (SOSMC) コントローラを提案する．

まず，出力 F. B. スライディングモード制御 (SOSMC) のコントローラを設計する前に，全状態量 SMC 制御のコントローラを設計する．

全状態量 SMC の切換え関数  $\sigma$  を式(79)で与える．

$$\sigma = SX \quad (79)$$

2次形式評価関数を最小にする LQR から求まる F. B. ゲインを， $S$  に選べば，状態を切換え面に拘束するための条件から等価制御入力は

$$U_{eq} = -(SB)^{-1} SAX \equiv -K_{eq} X \quad (80)$$

従って，系の特性行列  $[A - B(SB)^{-1}SA]$  が安定になるように  $S$  を設計する．

出力 F. B. 系の SMC における切換え関数  $\sigma_c$  を

$$\sigma_c = S_c Y \quad (81)$$

とおく.  $S$  に準最適制御の 1 つの手法である最小誤差励振法<sup>(8.2.4-2)</sup>を適用することにより,  $S_c$  は式(82)のように求めることができる.

$$S_c = S V C^T (C V C^T)^{-1} \quad (82)$$

ただし,  $V$  はリアプノフ方程式(83)の解である.

$$(A - B S) V + V (A - B S)^T + I = 0 \quad (83)$$

出力 F.B. による等価制御入力  $U'_{eq}$  は, 状態を切換え面に拘束するための条件から, 式(84)が求まる.

$$U'_{eq} = -(S_c C B)^{-1} S_c C A X \quad (84)$$

ここで, 出力 F.B. 系を形成するためには,

$$S_c C A X \equiv M' C X = M' Y$$

とおいた時,  $M'$  は  $S_c C A \in \text{Range } C$  を満足する必要がある<sup>(11)</sup>. 式(84)は, この条件を満たさないので, ここでは, 以下のようにして出力 F.B. 系における等価制御入力  $U'_{eq}$  を定める.

出力 F.B. 系における F.B. ゲインを  $K'_{eq}$  とおけば, 等価制御入力  $U'_{eq}$  は,

$$U'_{eq} \equiv -K'_{eq} Y = -K'_{eq} C X \quad (85)$$

式(77)に式(85)を適用した系と式(77)に式(80)を適用した系の誤差を最小にする  $K'_{eq}$  は, 最小誤差励振法を用いて次のように定まる.

$$K'_{eq} = K_{eq} V C^T (C V C^T)^{-1} \quad (86)$$

ここで,  $V'$  はリアプノフ方程式の解(87)である.

$$(A - B K_{eq}) V' + V' (A - B K_{eq})^T + I = 0 \quad (87)$$

このようにして  $K'_{eq}$  が求まり, 出力 F.B. による SMC コントローラの設計を行なうことができる.

ここで提案した手法をサーボ系に拡張する. 誤差の状態変数を  $e_x = X_d - X$  と定義すると, 誤差状態方程式は次式ようになる.

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= Ae_x + BU \\ e_y &= Ce_x \end{aligned} \quad (88)$$

このときの切換え関数を式(89)のように定める.

$$\sigma_c = Sce_y \quad (89)$$

このとき切換え面に拘束される条件は

$$\dot{\sigma}_c = Sc\dot{e}_y = ScCe_x = ScC(Ae_x + BU) = 0 \quad (90)$$

となり, 等価制御入力

$$U_{eq} = -(ScCB)^{-1} ScCAe_x \quad (91)$$

であたえられるが,  $U_{eq}$  を含んだシステムの特性と  $U'_{eq}$  を含んだシステムの特性と  
の誤差を最小にするよう最小誤差励振法を用いて制御入力を決定する.

$$K'_{eq} = K_{eq} V' C (C V' C^T)^{-1} \quad (92)$$

$$U'_{eq} = -K'_{eq} * e_y \quad (93)$$

次に, 出力 F.B.による非線形制御入力の設計を行う. リアプノフ関数  $L$  を,  
サーボ系の切換え関数  $\sigma'_c$  を用いて式(94)のように選ぶ.

$$L = \frac{1}{2} \sigma_c'^2 \quad (94)$$

系がスライディングモードに漸近する条件は  $L$  が負定であること, すな  
わち, 式(95)で与えられる.

$$dL/dt = \sigma_c' \cdot \dot{\sigma}_c' < 0 \quad (95)$$

出力 F.B.系における非線形制御入力は式(95)の条件を満たす必要がある  
が, この時の出力 F.B.ゲイン  $K'$  は切換え関数の符号により変化し, 式(96)  
のように与えられる.

$$K' = \begin{cases} k^+ > K'_{eq} & \sigma_c'(e_y) > 0 \\ k^- < K'_{eq} & \sigma_c'(e_y) < 0 \end{cases} \quad (96)$$

このようにして, 34 変数の系に対して, 各関節モータ出力軸の角度,  
角速度および各リンク先端加速度の合計 6 個の出力を用いた低次元コント  
ローラを設計することができた. これを, SOSMC と呼ぶ.

本コントローラの等価制御入力に関するブロック線図を Fig.8 に示す.

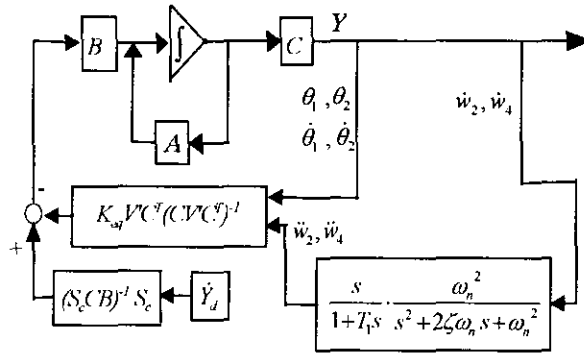


Fig. 8 Equivalent Control System

### 2. 4. 2 制振制御実験

【実験条件】 ここでは、典型的な速度パターンであり、かつ、アームが振動しやすい台形速度入力を各関節に与えた。すなわち、アームを水平に伸ばした状態から肩関節と肘関節を同時に 1.5 秒間に +15° 動作するケース 1 (図 9) および肩と肘関節を同時に 1.5 秒間に +60° 動作させるケース 2 の 2 つのケースについて実験を行った。すなわち、加速、等速、減速それぞれ 0.5sec なる台形速度パターンおよび加速、等速、減速それぞれ 1.0sec なる台形速度パターンを動作目標とした。

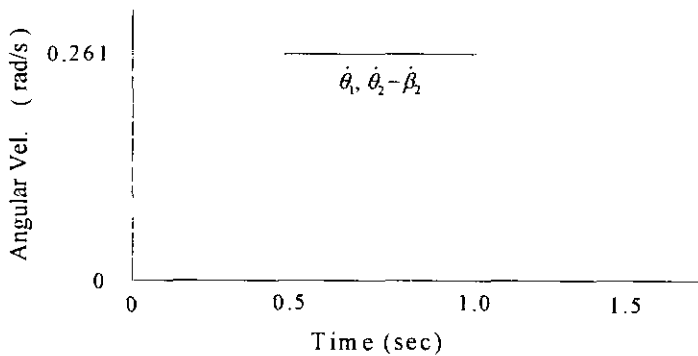


Fig. 9 Trapezoid Velocity Input

観測量は各関節の回転角・回転角速度および各リンク先端軸直交方向の加速度

の合計6である。制御周期は1msecとした。

本手法の制御性能を比較検討するために、3つの制御手法による実験を行った。第1は、各関節における角度および角速度をフィードバックするローカルF.B.(以下、Local F.B.と呼ぶ)制御であり、これは、関節の位置決めと軽い減衰を与えるものである。以下の議論では、このLocal F.B.を制振制御なしとみなすことにする。

第2は切換え面 $S_c$ を状態F.B.ゲインとして用いた準最適制御(以下、SOFBと呼ぶ)である。

第3はここで提案するSOSMCによる制御である。

また、ロバスト性の検証のために、制御ゲインを変えずに、先端集中質量を約20%増加した場合の実験も行った。

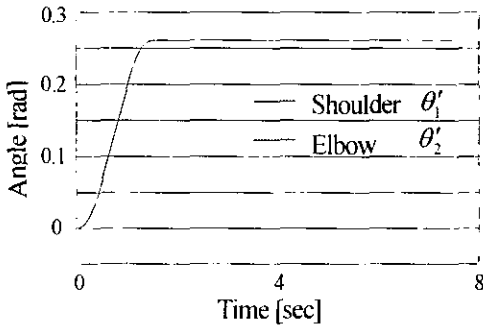
**【制御特性の実験】** 提案した制御系設計手法の性能を調べるために、肩および肘関節を同時に $+15^\circ$ 動かしたケース1について、Local F.B.、SOFB およびSOSMCにより設計したFBゲインを用いた各関節の角度、アーム先端加速度の実験結果をそれぞれ、図10、11および12に示す。また、肩および肘関節を同時に $+60^\circ$ 動かしたケース2について、同様に設計した設計したFBゲインを用いた各関節の角度、アーム先端加速度の実験結果をそれぞれ、図13、図14および図15に示す。

これらの結果から明らかなように、Local F.B.の先端加速度は減衰せずに振動が持続しているが、SOFB およびSOSMCでは減衰している。例えば、ケース1において、動作開始4sec.後に注目すれば、Local F.B.では $1.0\text{m/sec}^2$ 程度の加速度振幅が持続しており、SOFBでは減衰しているものの $0.5\text{m/sec}^2$ 程度の加速度振幅であるが、SOSMCでは $0.2\text{m/sec}^2$ 以下になっている。

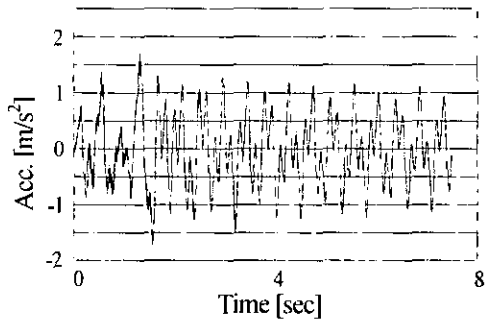
残留している振動は、摩擦によるものであり、振幅が小さくなったため制御力が小さくなり、補償しきれなかったためと考えられる。

また、各関節の角度偏差は、ほぼ無視できる程度であり、位置決め精度は確保されていることが分かる。



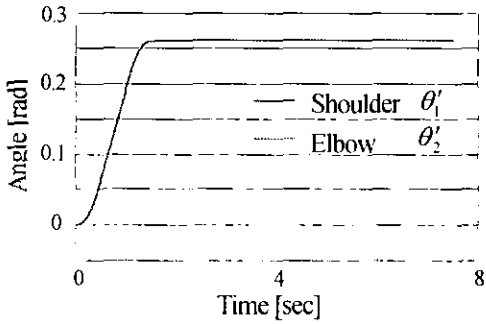


(a) Joint Angle

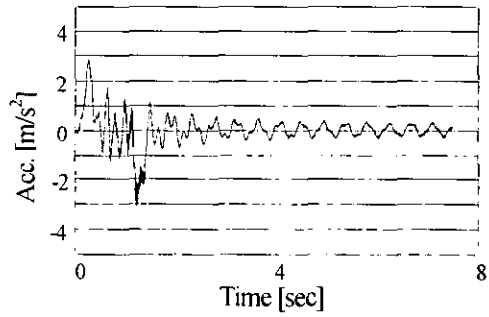


(b) Arm Tip Acceleration

Fig. 10 LocalFB (case 1)

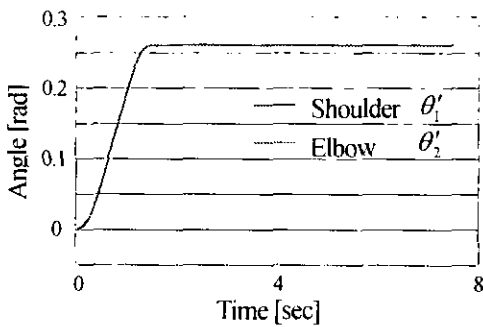


(a) Joint Angle

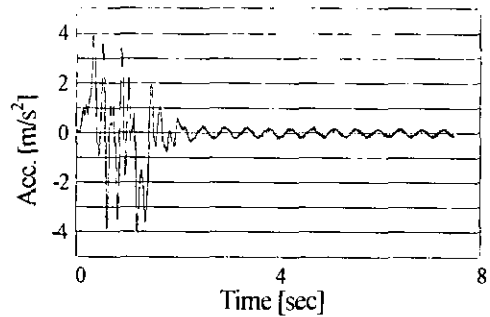


(b) Arm Tip Acceleration

Fig. 11 SOFB (case 1)

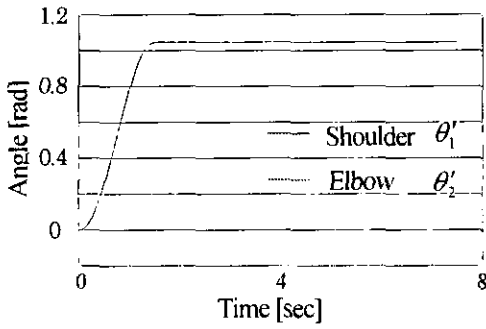


(a) Joint Angle

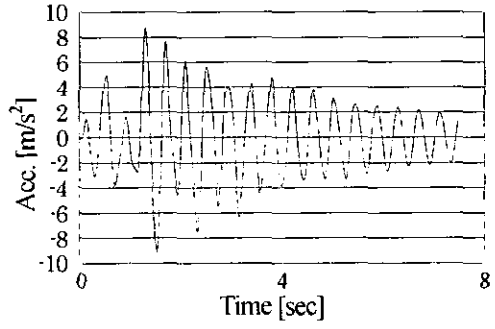


(b) Arm Tip Acceleration

Fig. 12 SOSMC (case 1)

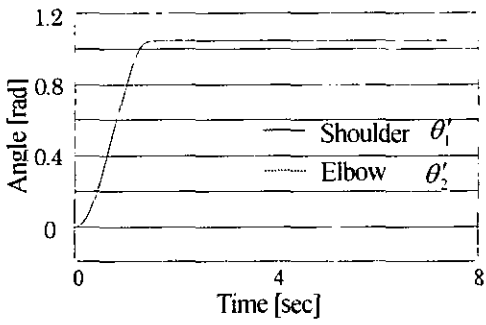


(a) Joint Angle

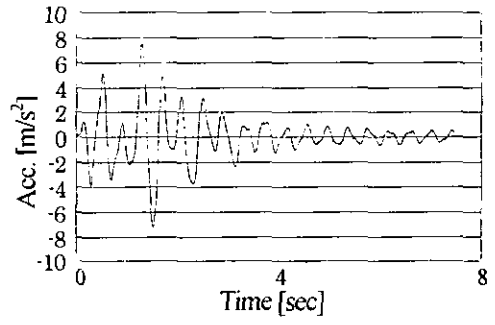


(b) Arm Tip Acceleration

Fig. 8.3.5-13 LocalFB ( case 2 )

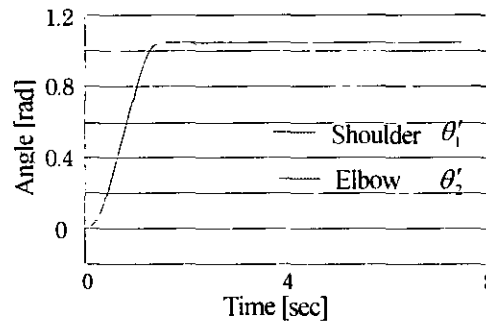


(a) Joint Angle

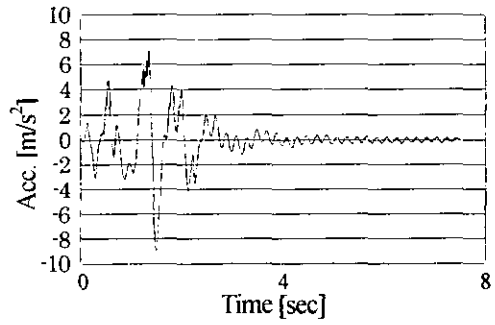


(b) Arm Tip Acceleration

Fig.14 SOFB ( case 2 )



(a) Joint Angle



(b) Arm Tip Acceleration

Fig.15 SOSMC ( case 2 )

【ロバスト性の検証】 SOSMC のロバスト性を検証するために、アーム先端の集中質量を20%増加させて、図11および図12に示したSOFBおよびSOSMCとケース1と同じ制御ゲインで実験した結果を、それぞれ図16と図17に示す。SOFBでは位置決め終了後のアーム先端加速度の残留振動が図11に比べて、かなり増加し、かつ、減衰が悪くなっている。しかしながら、SOFBでは、スピルオーバー等を起こすことはなかった。SOSMCでは、動作時のアーム先端加速度が若干大きくなっているが、位置決め終了後のアーム先端加速度の残留振動は図12とほとんど同等であり、良好な制振効果が得られていることがわかる。即ち、この程度のシステムのパラメータ変動に対して提案したSOSMCは充分ロバスト性があると考えられる。

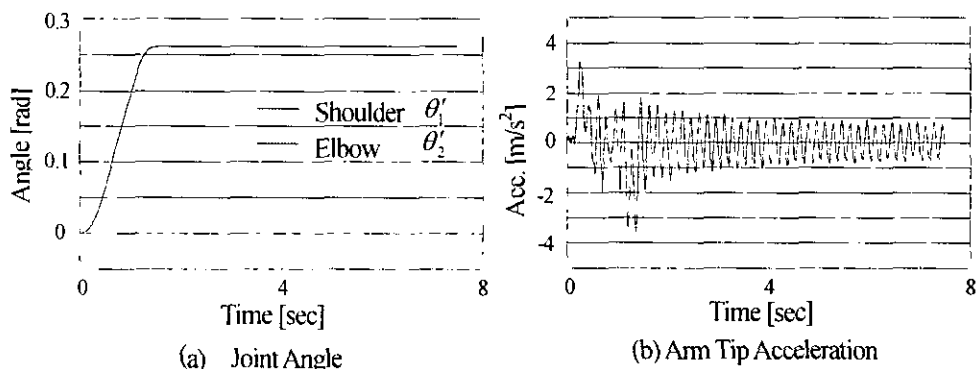


Fig.16 Robustness of SOFB (case 1)

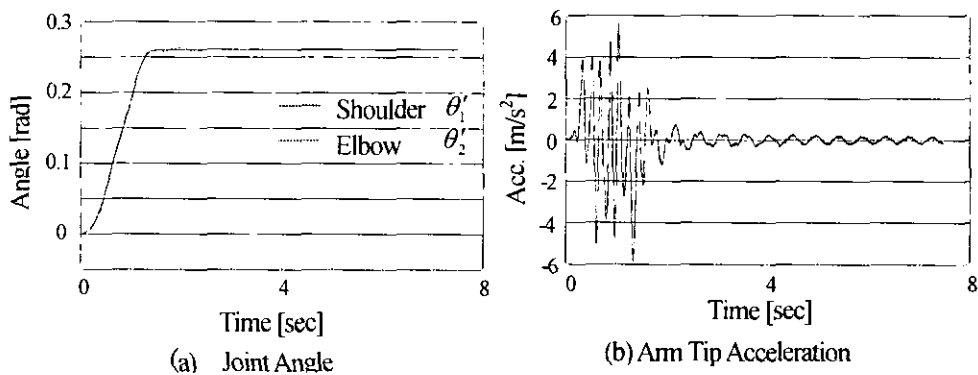


Fig.17 Robustness of SOSMC (case 1)

## 2. 5 結 論

- (1) 大回転を伴う柔軟梁についてモード合成法による定式化手法をマルチボディダイナミクス立場から大回転に伴う遠心力およびコリオリ力に関する慣性力成分を厳密に取り扱って示した。
- (2) 剛体回転に伴う遠心力が見かけ上の弾性復元力として働く動的スティフニングの効果の本定式化により低次元モデルに対して数値計算可能であることを示した。
- (3) (1)で示した柔軟梁モデルを用いて、マルチボディダイナミクス立場から弾性リンクおよび関節部の剛体からなる2リンク柔軟ロボットアームのモデル化を行った。
- (4) (3)で示した2リンク柔軟ロボットアームに対し数値計算を行い、実験結果との比較により本定式化手法およびモデル化手法の妥当性および有効性を示した。
- (5) 出力フィードバックを用いたスライディングモード制御コントローラ(SOSMC)を設計し、6つの観測量を用いて、リアルタイムで制振制御可能な低次元コントローラを実現した。
- (6) SOSMCは速応性があり、また、システム変動に対してロバスト性に優れた制振制御手法であることを実験により示した。

最後に、本研究の遂行をサポートしてくださった、小林研究室の博士前期課程学生および卒論生諸君に感謝いたします。

## 参考文献

- (1) Kane T. R., Ryan R. R. and Banerjee A. K., *J. Guid. Control*, **10-2**, (1987), 139.
- (2) Wu S. C., Haug E. J., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **26**, (1988), 2211.
- (3) Simo J. C., Vu-Quoc L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **53**, (1986), 849.
- (4) Shabana A. A., *Dynamics of Multibody Systems*, (1989), 253, John Wiley & Sons.
- (5) Shabana A. A., *J. Multibody System Dynamics*, **1**, (1997), 189.
- (6) Hurty W. C., *AIAA J.*, **3-4**, (1965), 678.
- (7) 小林, 機講論, 890-61, (1989), 86.
- (8) Sugiyama H., Kobayashi N., *Proc. of 4th MoViC*, **1**, (1998), 311.
- (9) 井上, 小林, 為近, 機講論, No.98-8, (1998), 721.
- (10) 後藤, 吉光, 小畑, 西野, *土木学会論文集*, 428/ I -15, (1991), 67.
- (11) 野波, *スライディングモード制御*, 東京電機大学出版局